DISTANCIAS III

Ejercicio nº 1.-

Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 2)$ a la recta siguiente:

$$r:\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Ejercicio nº 2.-

Halla la distancia de $P(3, 4, -1)$ al plano π: $2x + y - 3z + 8 = 0$.

Ejercicio nº 3.-

Calcula razonadamente la distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta siguiente:

$$r:\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Ejercicio nº 4.-

Determina la eduación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Ejercicio nº 5.-

Considera las rectas r y s:

$$r:\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Calcula la distancia entre ellas dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Ejercicio nº 6.-

Determina la ecuación de un plano, π, paralelo al plano de ecuación $x - y + z + 2 = 0$ y que dista 20 unidades del punto $P(0, 2, 3)$.

SOLUCIONES

Solución nº 1:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:
  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Pasa por $P(1, -1, 2)$.
  Su ecuación es:
  $\pi: 2 \cdot (x-1) + (y+1) - (z-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: 2x + y - z + 1 = 0$
- Intersección de π y r.
  Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2 \cdot (2\lambda) + \lambda + \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 6\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-2}{6} \\ y = \dfrac{-1}{6} \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \rightarrow \quad P'\left(\frac{-2}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{6}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{210}}{6} = 2{,}42$$

Solución nº 2:

$$dist(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + 4 - 3 \cdot (-1) + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{21}{\sqrt{14}} = 5{,}61$$

Solución nº 3:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:
  Su vector normal, es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (-1, -1, 2)$. Pasa por $P(3, -1, 5)$.
  Su ecuación es:
  $-1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y+1) + 2 \cdot (z-5) = 0$
  Simplificando:
  $\pi: -x - y + 2z - 8 = 0$ o también $\pi: x + y - 2z + 8 = 0$.
- Intersección de π y r:
  Sustituimos las coordenadas de r en π.

$$(2-\lambda) - \lambda - 2(3 + 2\lambda) + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -6\lambda + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{-2}{3} \\ z = \dfrac{13}{3} \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad P'\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = \sqrt{\left(3 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{13}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3} = 1{,}83$$

Solución nº 4:

Un plano paralelo a $2x - y + z + 4 = 0$ es de la forma:
$\pi: 2x - y + z + k = 0$
Tenemos que hallar k para que la distancia a P sea 10 u:

$$dist\,(P,\pi)=\frac{|2\cdot 2+1+k|}{\sqrt{4+1+1}}=10$$

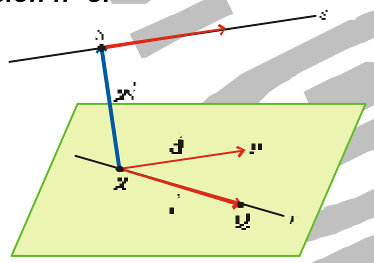
$$|5+k|=10\sqrt{6}\begin{cases}5+k=10\sqrt{6} & \rightarrow \quad k=10\sqrt{6}-5\\ -5-k=10\sqrt{6} & \rightarrow \quad k=-5-10\sqrt{6}\end{cases}$$

Hay dos planos:

$2x-y+z+10\sqrt{6}-5=0$

$2x-y+z-10\sqrt{6}-5=0$

Solución nº 5:



$$dist\,(s,r)=dist\,(S,\text{ plano }RPQ)=\frac{\text{Volumen del paralelepípedo definido por }\vec{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'}{\text{Área del paralelogramo definido por }\vec{d},\ \vec{d}'}=$$

$$=\frac{\left|\left[\vec{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right]\right|}{\left|\vec{d}\times\vec{d}'\right|}$$

$$r\begin{cases}\text{Un punto: } R(3,0,-1)\\ \text{Un vector dirección: } \vec{d}(1,-2,0)\end{cases}$$

$$s\begin{cases}\text{Un punto: } S(2,0,0)\\ \text{Un vector dirección: } \vec{d}'(-1,1,1)\end{cases}$$

$$\left[\vec{RS},\ \vec{d},\ \vec{d}'\right]=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$\vec{d}\times\vec{d}'=(-2,-1,-1)$$

$$\left|\vec{d}\times\vec{d}'\right|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$$dist\,(r,s)=\frac{1}{\sqrt{6}}=0{,}41$$

Solución nº 6:

Un plano paralelo a $x-y+z+2=0$ es de la forma:

π: $x-y+z+k=0$

Tenemos que hallar k para que la distancia a P sea 20 u:

$$dist\,(P,\pi)=\frac{|-2+3+k|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{3}}=20$$

$$|1+k|=20\sqrt{3}\begin{cases}1+k=20\sqrt{3} & \rightarrow \quad k=20\sqrt{3}-1\\ -1-k=20\sqrt{3} & \rightarrow \quad k=-20\sqrt{3}-1\end{cases}$$

Hay dos planos:

$x-y+z+20\sqrt{3}-1=0$

$x-y+z-20\sqrt{3}-1=0$